Invex最適化問題の最適性と感度分析

小 畑 経 史, 白 石 俊 輔

Optimality Conditions and Sensitivity Analysis of Nonlinear Optimization Problems under Invexity

Tsuneshi OBATA and Shunsuke SHIRAISHI

大分大学工学部研究報告　第35号
平成９年２月２８日　発行

Invex最適化問題の最適性と感度分析

小畑 経史*,　白石 俊輔**

Optimality Conditions and Sensitivity Analysis of Nonlinear Optimization Problems under Invexity

Tsuneshi OBATA and Shunsuke SHIRAISHI

Invexity of functions is a generalization of the notion of convexity. In this report, we review necessary and sufficient optimality conditions for a nonlinear optimization problem under invexity of functions involved. We will apply the results to sensitivity analysis of a parametrized optimization problem.

Key words: Invex functions, nonlinear optimization, minimax-function, sensitivity analysis.

1　はじめに

本論文の前半では, 次のような最適化問題を扱う:

$$\begin{cases} \text{minimize} & f(x), \\ \text{subject to} & g_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{1}$$

ただし, f, g_i, $i = 1, \ldots, m$ はいずれも R^n から R への微分可能関数とする. この最適化問題の実行可能領域を

$$S = \{x : g_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, m\}$$

と表し, また, $x \in S$ におけるアクティブな制約の添字集合を

$$I(x) = \{i : g_i(x) = 0\}$$

と表す.

この最適化問題の最適性に関して, Kuhn-Tucker 条件が重要な役割を果たすことが知られている. 関数 f, g_i, $i = 1, \ldots, m$ がいずれも凸関数の場合には, Kuhn-Tucker 条件が問題 (1) の (大域的) 最適性のための十分条件となる. また一方, 制約想定 (constraint qualification) のもとでは, Kuhn-Tucker 条件は問題 (1) の (局所的) 最適性のための必要条件となる. 特に Slater の制約想定は g_i のいくつかに凸性を仮定するものである.

これらに現れた凸性を拡張するものとして, いくつかの一般化凸関数が提案されたが, invex 関数もそのひとつである [4]. 微分可能関数 $f : R^n \to R$ が invex であるとは, 写像 $\eta : R^n \times R^n \to R^n$ が存在して,

$$f(x) - f(u) \ge \nabla f(u)^T \eta(x, u), \quad \text{for all} \quad x, u \in R^n$$

をみたすことをいう. このように定義された invex 関数は次のような重要な性質をもつ.

定理 1 ([2], Theorem 1) 関数 f が *invex* であるための必要十分条件は, f の任意の停留点がかならず大域的最小点となること, すなわち,

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x^*) \le f(x), \quad \textit{for all} \quad x \in R^n$$

が成り立つことである.

本論文ではまず, 最適性の必要条件, 十分条件, そして鞍点定理に現れる凸性を invex 性に置き換える

平成9年1月10日受理
* 大分大学工学部知能情報システム工学科
** 富山大学経済学部経営学科

ことができることを述べる．そしてこれらの結果をパラメトリックな最適化問題の感度分析に適用する．

2　Kuhn-Tucker 条件の必要性

非線形計画問題に対する最適性条件としては次の Kuhn-Tucker 条件が最も良く知られたものである．

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0, \tag{2}$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

$$\lambda_i^* \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

この Kuhn-Tucker 条件はこれよりも弱い条件である F. John 条件から導かれる．

定理 2 (F. John, [6], 定理 4.7) 点 $x^* \in R^n$ が *(1)* の局所最適解であるならば，

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

をみたす $0 \neq (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*) \geq 0$ が存在する．

F. John 条件において，もし $\lambda_0^* \neq 0$ ならば，ただちに Kuhn-Tucker 条件が導かれる．そのために付加される条件が，普通制約想定と呼ばれる条件である．比較的 ‘ゆるい’ 制約想定として，次の条件が知られている [1]:

$$C(x) = \overline{D(x)}. \tag{4}$$

ここで，$C(x)$, $D(x)$ はそれぞれ $x \in S$ における実行可能領域 S の線形化錐 (linearizing cone) 及び実行可能方向集合 (feasible direction set)，すなわち，

$$C(x) = \{y : \nabla g_i(x)^T y \leq 0,\ i \in I(x)\},$$

$$D(x) = \{y : \text{there exists } \varepsilon_0 \text{ such that } x + \varepsilon y \in S,\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\}$$

であり，$\overline{D(x)}$ は $D(x)$ の閉包を表す．実行可能解 $x \in S$ に対してはかならず $C(x) \supset \overline{D(x)}$ が成り立つので，制約想定 (4) は本質的には $C(x) \subset \overline{D(x)}$ を意味する．制約想定 (4) の下での Kuhn-Tucker 条件の必要性の定理をここであらためて述べておこう．

定理 3 ([1], Théorème 3.4) 点 $x^* \in R^n$ が *(1)* の局所的最適解であり，制約想定 *(4)* が x^* において成立するならば，

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

をみたす $\lambda_i^* \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ が存在する．

この制約想定 (4) は検証が容易ではないが，Slater の制約想定，すなわち，

- g_i, $i \in I(x)$ が凸関数である (凸性条件)，
- 点 $x^0 \in R^n$ が存在して

$$g_i(x^0) < 0, \quad i = 1, \ldots, m \tag{5}$$

をみたす (Slater 条件)，

はより検証が容易である．

実は Slater の制約想定の凸性条件を invex 性の条件に置き換えても，F. John 条件から Kuhn-Tucker 条件を導くことができる．これを示そう．

定理 4 点 $x^* \in R^n$ を *(1)* の局所的最適解とする．*いま，g_i, $i \in I(x^*)$ の非負線形結合は常に invex で，Slater 条件 (5) をみたす点 $x^0 \in R^n$ が存在すると仮定する．このとき x^* に対する F. John 条件は，$\lambda_0^* \neq 0$ をみたす．したがって Kuhn-Tucker 条件が成立する．*

証明:　$\lambda_0^* = 0$ と仮定すると，F. John 条件より，

$$\sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0$$

が得られる．これは，点 x^* が invex 関数 $x \mapsto \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i g_i(x)$ の停留点であることを意味している．したがって x^* はこの関数の大域的最小点である．相補性条件 (3) からその値は $\sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* g_i(x^*) = 0$ である．当然 Slater 条件をみたす点 $x^0 \in R^n$ に対し

$$\sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* g_i(x^0) \geq \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* g_i(x^*) = 0$$

であるが，$g_i(x^0) < 0$ なのだからこれが成立するためには任意の $i \in I(x^*)$ に対して，$\lambda_i^* = 0$ でなくてはならない．これは $(\lambda_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*) \neq 0$ に矛盾する．　□

3　Kuhn-Tucker 条件の十分性

凸性を invex 性に置き換えた場合の Kuhn-Tucker 条件の十分性については Hanson [4] が示している．

定理 5 ([4], Theorem 2.1) *f, g_i, $i = 1, \dots, m$ が同じ η について invex であるとする．さらに*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$
$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$g_i(x^*) \le 0, \quad i = 1, \dots, m$$

をみたす $x^* \in R^n$ と $\lambda_i^* \ge 0$, $i = 1, \dots, m$ が存在するならば, x^* は (1) の大域的最適解となる．

定理 4 に符合するように, invex 性に関わる仮定を次の形に弱めることができるのは明らかである．

定理 6 *関数 f, g_i, $i = 1, \dots, m$ の非負線形結合は常に invex であるとする．さらに*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$
$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$g_i(x^*) \le 0, \quad i = 1, \dots, m$$

をみたす $x^* \in R^n$ と $\lambda_i^* \ge 0$, $i = 1, \dots, m$ が存在するならば, x^* は (1) の大域的最適解となる．

この定理と定理 4 により直ちに以下のような Kuhn-Tucker 条件の必要十分性の定理が導かれる．

定理 7 *関数 f, g_i, $i = 1, \dots, m$ の非負線形結合は常に invex であり, また, (5) をみたす $x^0 \in R^n$ が存在すると仮定する．このとき, $x^* \in R^n$ が (1) の大域的最適解であるための必要十分条件は,*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$
$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$g_i(x^*) \le 0, \quad i = 1, \dots, m$$

をみたす $\lambda_i^* \ge 0$, $i = 1, \dots, m$ が存在することである．

証明:　定理 4 と定理 6 より明らか．　□

4　鞍点定理

Ben-Israel and Mond [2] はラグランジュ関数 $L : R^n \times [0, \infty)^m \to R$:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x), \quad x \in R^n,\ \lambda \ge 0$$

が invex である場合の鞍点定理を示した．

定理 8 ([2], Theorem 3) *関数 $L(\cdot, \lambda)$ が任意の $\lambda \ge 0$ に対して invex であり, 点 $x^* \in R^n$ が (1) の最適解とする．さらに制約想定が成り立つならば, $\lambda^* \ge 0$ が存在して, (x^*, λ^*) がラグランジュ関数 L の鞍点となる．すなわち:*

$$L(x^*, \lambda) \le L(x, \lambda^*), \quad \textit{for all} \quad x \in R^n,\ \lambda \ge 0$$

が成立する．

関数 $L(\cdot, \lambda)$ が任意の $\lambda \ge 0$ に対し invex となる, という条件をみたすためには, f, g_i, $i = 1, \dots, m$ の非負線形結合が常に invex であればよい．さらにいえば, この定理に現れる λ^* は実際には Kuhn-Tucker 乗数であり, したがって相補性条件よりアクティブでない制約 g_i, $i \notin I(x^*)$ は $L(x^*, \lambda^*)$ にはまったく影響を与えない．

また, 彼らはこの定理で制約想定を特定することはしていないが, 定理 4 と同様に Slater 条件と invex 性とを制約想定として用いることが可能である．

これらを考えあわせることで以下が導かれる．

定理 9 *点 $x^* \in R^n$ が (1) の局所的最適解であり, 関数 f, g_i, $i \in I(x^*)$ の非負線形結合が常に invex であるとし, そして (5) をみたす $x^0 \in R^n$ が存在するとする．このとき $\lambda^* \ge 0$ が存在し, (x^*, λ^*) がラグランジュ関数 L の鞍点となる．*

証明:　定理 4 より Kuhn-Tucker 乗数 $\lambda^* \ge 0$ が存在する, すなわち,

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0, \tag{6}$$
$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \tag{7}$$

相補性条件 (7) より $i \notin I(x^*)$ のときには$\lambda_i^* = 0$ となり, したがって関数

$$L(\cdot, \lambda^*) = f(\cdot) + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* g_i(\cdot)$$

は invex. (6) より x^* は invex 関数 $L(\cdot,\lambda^*)$ の停留点であり, したがって大域的最小点となる. つまり

$$L(x^*,\lambda^*) \leq L(x,\lambda^*), \quad \text{for all} \quad x \in R^n$$

が成り立つ.

一方, $g_i(x^*) \leq 0,\ i=1,\ldots,m$ なので, 任意の $\lambda \geq 0$ に対して

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^*) \leq 0.$$

ゆえに任意の $\lambda \geq 0$ に対して,

$$\begin{aligned} L(x^*,\lambda) &= f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^*) \\ &\leq f(x^*) \\ &= f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) \\ &= L(x^*,\lambda^*). \end{aligned}$$

□

5　感度分析

この節では, 次のようなパラメトリックな問題を扱う.

$$\begin{cases} \text{minimize} & f(x,y), \\ \text{subject to} & g_i(x,y) \leq 0, \quad i=1,\ldots,m. \end{cases} \tag{8}$$

ただし $f,\ g_1,\ldots,g_m : R^n \times R^k \to R$ とし, $y \in R^k$ をパラメータと考える. 最適値関数

$$h(y) = \inf_x \{f(x,y) : g_i(x,y) \leq 0,\ i=1,\ldots,m\}$$

の片側方向微分 $h'(y^0;d) = \lim_{t\to 0^+}[h(y^0+td) - h(y^0)]/t$ を知ろうというのが, ここで扱おうとしている感度分析問題である. 以下では片側方向微分を考える際には, 基点 y^0 と方向 $d \neq 0$ は固定しておくことにする.

我々は, ラグランジュ関数 $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x,y)$ を導入すると, 最適値関数 h がミニマックス関数の形に書き改められることに注目する:

$$h(y) = \inf_{x\in R^n} \sup_{\lambda\geq 0} L(x,y,\lambda).$$

一般的な形のミニマックス関数の方向微分については Correa and Seeger [3] で詳しく調べられているので, 彼らの結果を最適値関数に適用することによって感度分析をしようというのがこの節での狙いである. パラメトリック最適化問題 (8) に現れる関数には次の条件をおく. $f,\ g_i,\ i=1,\ldots,m$ は C^1-級とする. Correa and Seeger によれば, この様な設定の下でミニマックス関数 h が方向微分可能となるためには:

- 双対性

$$\inf_{x\in R^n} \sup_{\lambda\geq 0} L(x,y,\lambda) = \sup_{\lambda\geq 0} \inf_{x\in R^n} L(x,y,\lambda)$$

- 集合値写像 $y \rightrightarrows X(y),\ \Lambda(y)$ の上半連続性

がみたされなければならない. ここで,

$$\begin{aligned} X(y) &= \{x \in R^n : \sup_{\lambda\geq 0} L(x,y,\lambda) = h(y)\}, \\ \Lambda(y) &= \{\lambda \geq 0 : \inf_{x\in R^n} L(x,y,\lambda) = \\ &\qquad \sup_{\lambda\geq 0} \inf_{x\in R^n} L(x,y,\lambda)\} \end{aligned}$$

は各々ミニマックス問題およびマクシミン問題の解集合写像である. また, 集合値写像 $F : [0,\infty) \rightrightarrows R^n$ が 0^+ において (Penot [7] の意味で) 上半連続であるとは, 任意の点列 $\{t^k\}_{k\in N} \to 0^+$ に対し, 点 $\tilde{x} \in F(0)$ と部分列 $\{t^k\}_{k\in K\subset N}$ および $\tilde{x}$ に収束する点列 $\{x^k\}_{k\in K}$ が存在し, 任意の $k \in K$ に対して $x^k \in F(t^k)$ となるときをいう.

Correa and Seeger によるミニマックス関数の方向微分定理 ([3], Theorem 2.1) をここでのラグランジュ関数に合わせて書き直したものが次の定理である.

定理 10　関数 $f,\ g_i,\ i=1,\ldots,m$ は C^1-級とする. いま, 正数 $\delta > 0$ が存在し, 任意の $t \in [0,\delta)$ に対し,

$$\begin{aligned} &\inf_{x\in R^n} \sup_{\lambda\geq 0} L(x,y^0+td,\lambda) = \\ &\qquad \sup_{\lambda\geq 0} \inf_{x\in R^n} L(x,y^0+td,\lambda) \end{aligned} \tag{9}$$

となりさらに,

$$t \in [0,\infty) \rightrightarrows X(y^0+td),\ \Lambda(y^0+td) \tag{10}$$

が $t = 0^+$ で上半連続であると仮定する. このとき最適値関数 h は y^0 において d 方向に片側方向微分可能であり, 次の公式が成立する.

$$h'(y^0;d) = \inf_{x\in X(y^0)} \sup_{\lambda\in\Lambda(y^0)} \nabla_y L(x,y^0,\lambda)^T d. \tag{11}$$

以下では双対性 (9) と上半連続性 (10) が成立するための条件について調べる．$X(y)\times\Lambda(y)$ はラグランジュ関数 $L(\cdot,y,\cdot)$ の鞍点集合となるので，$X(y)$ 及び $\Lambda(y)$ がともに非空であることが示されれば双対性 (9) が得られることになる．問題 (8) が解を持つ (i.e. $X(y)$ が非空) 場合は，4節で示したように関数の invex 性と Slater 条件によってこれが保証される．ただし，パラメトリックな問題を考えている関係上若干の補正が必要となる．次の補題は Shiraishi [8] による．

補題 11 (Shiraishi [8], LEMMA 1) T をノルム空間，$t^0\in T$, $g:R^n\times T\to R$ とする．いま，t^0 の近傍 N があって g は $R^n\times N$ 上で一様連続であり，さらに $g(\cdot,t^0)$ が R^n 上 *inf-compact*, すなわち，レベル集合 $S_r=\{x\in R^n: g(x,t^0)\le r\}$ が任意の $r\in R$ についてコンパクトであると仮定する．このとき t^0 に収束する任意の点列 $\{t^k\}_{k\in N}$ と任意の非有界な点列 $\{x^k\}_{k\in N}\subset R^n$ に対し，点列 $\{g(x^k,t^k)\}_{k\in N}$ は上に有界とはならない．

解の存在は目的関数の inf-compact 性と Slater 条件によって保証される．ただし，ここでの Slater 条件は，

$$g_i(x^0,y^0)<0,\quad i=1,\dots,m \tag{12}$$

をみたす $x^0\in R^n$ が存在することである．

補題 12 関数 g_i, $i=1,\dots,m$ は連続で，目的関数 f が一様連続であるとする．*Slater* 条件 *(12)* をみたす点 $x^0\in R^n$ が存在し，さらに $f(\cdot,y^0)$ が R^n 上 *inf-compact* であると仮定する．このとき，正数 $\delta>0$ が存在し，任意の $t\in[0,\delta)$ に対し $X(y^0+td)\neq\emptyset$ となる．

証明: Slater 条件と関数の連続性により，y^0 に十分小さな摂動を加えても問題 (8) は実行可能になることに注意する．すなわち，正数 $\delta>0$ が存在し，任意の $t\in[0,\delta)$ に対し

$$g_i(x^0,y^0+td)<0,\quad i=1,\dots,m$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned}S(t)=\{x\in R^n:\ & \\ & f(x,y^0+td)\le f(x^0,y^0+td),\\ & g_i(x,y^0+td)\le 0,\quad i=1,\dots,m\}\end{aligned}$$

とおく．このとき，$S(t)$ が $t=0^+$ の近傍で一様有界，すなわち，正数 $\delta>0$ が存在し，$\cup_{t\in[0,\delta)}S(t)$ が有界集合になることをいえば，$S(t)$ が明らかに閉集合であることから $S(t)$ はコンパクトであることがいえ，$X(y^0+td)\neq\emptyset$ が導かれる．f は連続であるので適当に正数 $\varepsilon>0$ を固定しておくと十分小さな $t\ge 0$ に対して

$$f(x^0,y^0+td)\le f(x^0,y^0)+\varepsilon$$

となることに注意しておく．さて，結論を否定すると 0^+ に収束する点列 $\{t^k\}_{k\in N}$ と非有界な点列 $\{x^k\}_{k\in N}\subset R^n$ が存在し，$x^k\in S(t^k)$ となる．このとき，

$$\begin{aligned}f(x^k,y^0+t^kd) &\le f(x^0,y^0+t^kd)\\ &\le f(x^0,y^0)+\varepsilon\end{aligned}$$

となり補題 11 に反する．□

補題 12 により，$X(y^0+td)\neq\emptyset$ であることがいえた訳だが，さらに関数の invex 性を仮定すると定理 9 から$\Lambda(y^0+td)\neq\emptyset$ であることが導かれる．

補題 13 補題 *12* と同じ仮定をおく．さらに，十分小さな任意の $t\ge 0$ を固定したとき，関数 $f(\cdot,y^0+td)$, $g_i(\cdot,y^0+td)$, $i=1,\dots,m$ の非負線形結合は常に *invex* であると仮定する．このとき，正数 $\delta>0$ が存在し，任意の $t\in[0,\delta)$ に対し $\Lambda(y^0+td)\neq\emptyset$ となる．

証明: 関数の連続性より，十分小さな $t\ge 0$ に対してもなお点 $x^0\in R^n$ が Slater 条件，

$$g_i(x^0,y^0+td)<0,\quad i=1,\dots,m,$$

をみたすことに注意しさえすれば定理9より明らかである．□

定理 10 を適用するために確かめなければならない条件は残るは $t\in[0,\infty)\rightrightarrows X(y^0+td)$, $\Lambda(y^0+td)$ の上半連続性のみとなった．これを保証するのもやはり目的関数の inf-compact 性と Slater 条件である．

補題 14 補題 *13* と同じ仮定をおく．このとき，

$$t\in[0,\infty)\rightrightarrows X(y^0+td),\ \Lambda(y^0+td)$$

は $t=0^+$ で上半連続である．

証明:　まず，$f(\cdot,y^0)$ の inf-compact 性から $L(\cdot,y^0,0)$ の inf-compact 性がいえることに注意する．さて，$\{t^k\}_{k\in N}\to 0^+$ に対して，補題 12, 13 か

ら十分大きな k に対して $x^k \in X(y^0+t^kd)$, $\lambda^k \in \Lambda(y^0+t^kd)$ が取れる．この点列 $\{x^k\}_{k\in N}$, $\{\lambda^k\}_{k\in N}$ はともに有界であることを示そう．(x^k, λ^k) は $L(\cdot, y^0+t^kd, \cdot)$ の鞍点なのだから特に次の式をみたしている．

$$L(x^k, y^0+t^kd, 0) \le L(x^0, y^0+t^kd, \lambda^k).$$

いま例えば $\{x^k\}_{k\in N}$ が有界でなかったとすると，上式で $k\to+\infty$ としたときに $L(\cdot, y^0, 0)$ の inf-compact 性から補題 11 によって，

$$+\infty \leftarrow L(x^k, y^0+t^kd, 0) \le L(x^0, y^0+t^kd, \lambda^k),$$

すなわち，$L(x^0, y^0+t^kd, \lambda^k)\to+\infty$ となる．こうなるためには $\{\lambda^k\}$ も非有界にならねばならない．ところが $g_i(x^0, y^0)<0$ であり，各 g_i は連続なのだから適当な正数 $\varepsilon_i>0$ をとれば十分大きな k に対して $-\varepsilon_i > g_i(x^0, y^0+t^kd)$ であり，$-\infty\leftarrow -\lambda_i^k\varepsilon_i > \lambda_i^k g_i(x^0, y^0+t^kd)$, すなわち，

$$\begin{aligned}+\infty &\leftarrow L(x^k, y^0+t^kd, 0)\\ &\le L(x^0, y^0+t^kd, \lambda^k)\to-\infty.\end{aligned}$$

これは矛盾．したがって点列 $\{x^k\}_{k\in N}$, $\{\lambda^k\}_{k\in N}$ の収束部分列 $\{x^k\}_{k\in K}\to\tilde{x}$, $\{\lambda^k\}_{k\in K}\to\tilde{\lambda}$ が存在する．あとは $\tilde{x}\in X(y^0)$, $\tilde{\lambda}\in\Lambda(y^0)$ であることをいえばよい．$(x^k,\lambda^k)\in X(y^0+t^kd)\times\Lambda(y^0+t^kd)$ なのだから任意の $x\in R^n$, $\lambda\ge 0$ に対し，

$$L(x^k, y^0+t^kd, \lambda) \le L(x, y^0+t^kd, \lambda^k),$$

をみたしている．この式で $k\to+\infty$ とすることにより，

$$L(\tilde{x}, y^0, \lambda) \le L(x, y^0, \tilde{\lambda}), \qquad \text{for all} \quad x\in R^n,\ \lambda\ge 0,$$

すなわち，$(\tilde{x},\tilde{\lambda})\in X(y^0)\times\Lambda(y^0)$ がいえる．　□

以上の事をまとめることにより，次の感度分析結果を得ることができる．

定理 15 次のような条件を考える．

- f, g_i, $i=1,\ldots,m$ は C^1-級で，特に f は一様連続である．
- 十分小さな任意の $t\ge 0$ を固定したとき，関数 $f(\cdot, y^0+td)$, $g_i(\cdot, y^0+td)$, $i=1,\ldots,m$ の非負線形結合は常に *invex* である．
- *Slater* 条件 *(12)* をみたす点が存在する．
- $f(\cdot, y^0)$ は R^n上 *inf-compact* である．

これらの条件がみたされていれば，最適値関数 h は y^0 において d 方向に片側方向微分可能であり，次の公式が成立する．

$$h'(y^0; d) = \inf_{x\in X(y^0)} \sup_{\lambda\in\Lambda(y^0)} \nabla_y L(x, y^0, \lambda)^T d$$

6　結び

Slater 条件が invex 性の下での制約想定となり得ることを示したことにより，Shiraishi [8] によって得られていた右側摂動 (right hand side pertubation) 問題に対する感度分析結果を改良することが出来た．しかしながら非凸計画問題に適用するために若干人為的な条件を付加してしまったため凸計画問題に対して得られている結果 [5] を完全にカバーするに至らなかった事は残念である．この点が今後の課題である．

付記: この研究は一部平成 8 年度文部省科学研究費基盤研究 (C)08680456 によるものである．

参考文献

[1] Auslender, A., Optimisation, Méthodes Numériques, Masson, Paris, 1976.

[2] Ben-Israel, A., and Mond, B., What is Invexity?, J. Austral. Math. Soc. Ser. B, **28** (1986), 1–9.

[3] Correa, R. and Seeger, A., Directional Derivative of a Minimax function, Nonlinear Anal. Th. Meth. Appl., **9** (1985), 13–22.

[4] Hanson, M. A., On Sufficiency of the Kuhn-Tucker Conditions, J. Math. Anal. Appl., **80** (1981), 545–550.

[5] Hogan, W. W., Directional Derivatives for Extremun Value Functions with Applications to the Completely Convex Case, Oper. Res., **21** (1973), 188–209.

[6] 今野浩, 山下浩, 非線形計画法, 日科技連, 1978

[7] Penot, J.-P., Continuity properties of performance functions, in Optimization theory and Algorithms, Edited by Hiriart-Urruty J.-B., Oetly W. and Stoer J., Dekker, 1983, pp.77–90.

[8] Shiraishi, S., Sensitivity Analysis of Nonlinear Programming Problems via Minimax Functions, to appear in Mathematical Programming with Data Pertubations, Fiacco, A.V. ed. , Marcel Dekker.