不完全一対比較行列ウェイトの評価法に関する数値実験

小畑経史，　醍醐元正，　白石俊輔

A Computational Experiment on the Methods for Estimating Priority Weights for Incomplete Comparison Matrices

Tsuneshi OBATA, Motomasa DAIGO and Shunsuke SHIRAISHI

大分大学工学部研究報告　第37号

平成10年3月31日発行

不完全一対比較行列のウェイトの評価法に関する数値実験

小畑 経史*，　醍醐 元正**，　白石 俊輔**

A Computational Experiment on the Methods for Estimating Priority Weights for Incomplete Comparison Matrices

Tsuneshi OBATA, Motomasa DAIGO and Shunsuke SHIRAISHI

In our previous work, we found out that characteristic polynomial of a positive reciprocal matrix has some noteworthy properties, and proposed a method for estimating a missing entry of an incomplete pairwise comparison matrix. We also made a computational experiment to compare our method with Harker's method. However this experiment seemed not to be natural in the sense that only quite inconsistent cases arose. So practical performance could not been estimated. In the present paper, we report a new experiment that can examine practical performance. As a result of this experiment, we see that our method works well in the actual situation.

Key words: AHP, reciprocal matrix, incomplete comparison matrix, Harker's method.

1　はじめに

T. L. Saaty によって提案された AHP (Analytic Hierarchy Process) は人間の主観をうまく取り入れ，人間の感覚に近い判断が行える意思決定手法である [1, 6, 7, 8, 12].

この手法の手順は大きくわけて，階層図の作成，一対比較，重要度ウェイトの計算，総合ウェイトの計算からなる．このうち重要度ウェイトの計算には，正値逆数行列である一対比較行列の (最大固有値に対する) 固有ベクトルを求める，固有値法と呼ばれる手法が用いられるのが一般的である．また固有ベクトルとともに得られる固有値にも，整合性を測る尺度としての使途がある．

しかしながら固有値，固有ベクトルを求めるためには数理的な知識やコンピュータの助けが不可欠であり，そのような知識や環境を持たない意思決定者にとって，AHP は容易に利用できる手法とはいいがたい．小畑らはこの点で意思決定者を支援するため，WWW を通じて重要度ウェイトを手軽に計算できるシステムを構築した [5].

実際に，一対比較行列から固有ベクトルを求めるには，固有方程式を解くのではなく (これは一般に困難なので)，べき乗法を用いて数値的に求めるのが一般的である．そのため，これまで一対比較行列の固有多項式が注目されることはほとんどなかった．我々は [9] において，正値逆数行列の固有多項式を詳細に調べ，これが一対比較の整合性の概念と深い関りのあることを述べた．さらに，この性質を利用して不完全一対比較行列の重要度ウェイトを決定する手法を新たに提案した．

上記論文ではまた，この我々の提案する手法を，最もポピュラーな手法である Harker 法 [2] と比較するための実験を行った．その実験の結果，ランダムに生成した不完全一対比較行列に対して，おおむね我々の手法が良好な結果をもたらすことが示された．しかし一方で，この実験で生成される行列に非現実的

平成10年2月27日受理
* 大分大学工学部知能情報システム工学科
** 富山大学経済学部経営学科

なものが多く含まれるのではないか，との疑問も残された．そこで，今回，より現実に近い状況での実験を試み，我々の手法が実用上非常に有効であることを示すことができた．

2　正値逆数行列の固有多項式

この節では正値逆数行列の固有多項式についての性質を述べる．

まず，定義からはじめよう．

定義 1 $A=(a_{ij})$ を $n\times n$ 実数値行列とする．

- A が正値行列 (positive matrix) であるとは，すべての $i,j=1,2,\ldots,n$ に対して $a_{ij}>0$ が成り立つことをいう．
- A が逆数行列 (reciprocal matrix) であるとは，すべての $i,j=1,2,\ldots,n$ に対して $a_{ij}=1/a_{ji}$ が成り立つことをいう．

したがって，正値逆数行列は一般に次のような形をしている．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

AHP で現れる一対比較行列は正値逆数行列である．

定義 2 $A=(a_{ij})$ を $n\times n$ 正値逆数行列とする．A が整合的である (consistent) とは，すべての $i,j,k=1,2,\ldots,n$ に対して $a_{ij}a_{jk}=a_{ik}$ が成り立つことをいう．

整合性とはすなわちすべての比較が矛盾なく行われているかどうかを表す概念である．一対比較行列 A が整合的であることと A の最大固有値 $\lambda_{\max}$ が行列のサイズ n と等しいこととが同値であることから，$\lambda_{\max}$ と n との離れ具合をもってして，行列の整合性のよさを測ることができる．またさらに，必ず $\lambda_{\max}\geq n$ が成り立つことも知られている [12].

定義 3 $A=(a_{ij})$ を $n\times n$ 正値逆数行列とする．

$$\mathrm{C.I.}=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}$$

を A の整合度 (consistency index) と呼ぶ．ここで $\lambda_{\max}$ は A の最大固有値である．

このように整合度 C.I. を定義すると，先に述べた $\lambda_{\max}$ の性質より，一対比較行列が整合的であることと $\mathrm{C.I.}=0$ が同値であること，そして必ず $\mathrm{C.I.}\geq 0$ が成り立つことがわかる．すなわち C.I. が 0 に近ければ近いほど，比較が矛盾なく行われていることになる．一般的には C.I. が 0.1 以下 (場合によっては 0.15 以下でもよしとされる) であればまずまず整合的に比較が行われていると判断され，それを超えると一対比較を見直す必要があるといわれている [12].

行列 A を $n\times n$ 正値逆数行列とし，A の固有多項式を

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(\lambda E-A) \\ &= c_0\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_{n-1}\lambda+c_n \end{aligned}$$

と表す (E は単位行列)．一般に $c_0=1$, $c_1=-\mathrm{trace}A$, $c_n=(-1)^n\det A$ であり，特に A が正値逆数行列のときはさらに $c_1=-\mathrm{trace}A=-n$ となる．

この正値逆数行列の固有多項式を詳しく調べることで，我々は以下の一連の結果を得た [9].

命題 1 行列 A を $n\times n$ 正値逆数行列とする．このとき A が整合的であることと

$$P_A(\lambda)=\lambda^n-n\lambda^{n-1}$$

が成り立つこととが同値である．

これより A の整合性が崩れるのは，$P_A(\lambda)$ に $n-2$ 次以降の「余分な」項が存在する場合，だといえる．そこで，固有多項式の係数を反復的に計算するための手法であるフレーム法 [3] を利用してこの「余分な」項をより詳しく調べることで，$P_A(\lambda)$ の $n-2$ 次の係数 c_2 と $n-3$ 次の係数 c_3 とが以下のように計算されることがわかった．

命題 2 A が正値逆数行列ならば $c_2=0$.

命題 3 $n\geq 3$, A が $n\times n$ 正値逆数行列ならば，

$$\begin{aligned} c_3 &= 2\binom{n}{3}-\sum_{i<j<k}\left(\frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}}+\frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}}\right) \\ &= \sum_{i<j<k}\left\{2-\left(\frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}}+\frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}}\right)\right\}. \qquad (1) \end{aligned}$$

系 1 $n\geq 3$, A が $n\times n$ 正値逆数行列ならば，$c_3\leq 0$.

A の整合性を判断するには，実は c_3 だけを見ればよい．

定理 1 $n \geq 3$, A が $n \times n$ 正値逆数行列のとき, A が整合的であることと, $c_3 = 0$ となることとが同値である.

証明: 命題 3 (1) より, A が整合的であれば $c_3 = 0$ となることがわかる.

逆に $c_3 = 0$ を仮定する. 相加平均相乗平均の関係から,

$$\frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} + \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} \geq 2$$

なので, $c_3 = 0$ より

$$\frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} + \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} = 2, \quad \text{for all} \quad i < j < k$$

でなければならない. ところがこれが成り立つのは

$$\frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} = \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}}, \quad \text{for all} \quad i < j < k$$

の場合に限られる. したがって,

$$a_{ij}a_{jk} = a_{ik}, \quad \text{for all} \quad i < j < k.$$

この関係から, 行列 A が整合的であることが容易に導かれる. □

3 不完全一対比較行列の重要度ウェイトの評価法

この節では, 前節での結果を利用して, 我々が提案した不完全一対比較行列のウェイトの評価法 [9] について述べるとともに, 既存の評価法である Harker 法を紹介する.

不完全一対比較行列の欠損が m 箇所 (対称部分をあわせると $2m$ 箇所) あるとする. それらの欠損箇所に変数 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ を補った行列を $A(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ と表す.

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & x_1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 1/x_1 & & \ddots & & x_2 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1/x_2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1 我々の提案した手法

不完全一対比較行列のウェイトを評価するためには, なんらかの方法で欠損を補う必要がある. その際, できるだけ整合的に, すなわち C.I. を小さくするように, 補うことが望ましい. これは, 行列 $A(x)$ の最大固有値 $\lambda_{\max}(x)$ に関する最小化問題:

$$\min_x \lambda_{\max}(x) \tag{2}$$

の解により欠損箇所を補うことに他ならない. しかしこの解を見つけることは一般に容易なことではない.

そこで, $A(x)$ の固有多項式の $n-3$ 次の係数に注目する. これを $c_3(x)$ とおくと, 定理 1 より, $c_3(x) = 0$ が成り立つことと $A(x)$ が整合的であること (これは $\lambda_{\max}(x) = n$ とも同値) が同値であることがわかる. また, 系 1 より $c_3(x) \leq 0$ である. したがって $\lambda_{\max}(x)$ を小さくして n に近づける代わりに $c_3(x)$ を大きくして 0 に近づけても, 同じように整合性がよくなるのではないかと期待される.

以上より, 我々は以下のようなヒューリスティックな手法を提案した.

[Proposed method]

Step 1 最適化問題:

$$\max_x \; c_3(x) \tag{3}$$

の解 x^* を見つける.

Step 2 $A(x^*)$ の最大固有値に対応する固有ベクトルを求める.

Step 3 求めた固有ベクトルを正規化したものを重要度ウェイトと定める.

欠損箇所が 1 箇所 ((i,j)-成分が欠損) の場合, 命題 3 より, 最適化問題 (3) は

$$\min_x \sum_{k \neq i,j} a_{ik}a_{kj}\frac{1}{x} + \sum_{k \neq i,j} \frac{1}{a_{ik}a_{kj}} x \tag{4}$$

と等価であることがわかる. この問題の解 x^* は簡単に求めることができ,

$$x^* = \sqrt{\left(\sum_{k \neq i,j} a_{ik}a_{kj}\right) / \left(\sum_{k \neq i,j} \frac{1}{a_{ik}a_{kj}}\right)} \tag{5}$$

となる.

欠損箇所が複数の場合には次の二つのケースに分けられる.

欠損しているのが $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_m, j_m)$ の各成分だとすると, それらが互いに同一行, 同一列に

重なっていなければ, (3) の解 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$ は

$$\begin{aligned} x_1^* &= \sqrt{(\sum_{k\neq i_1,j_1} a_{i_1k}a_{kj_1})/(\sum_{k\neq i_1,j_1} \frac{1}{a_{i_1k}a_{kj_1}})}, \\ x_2^* &= \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

と表される.

欠損が同一行, 同一列に重なっている場合には (3) の解はこのような形には書けず, 数値解析的な手法を用いる必要がある.

3.2 Harker 法

Harker 法は不完全な一対比較行列の重要度ウェイトの評価のために,Harker によって提案された手法である [2]. 彼の手法は次のようなアイデアに基づく. 行列の (i,j)-成分が欠損している場合, そこに人工的に w_i/w_j をあてはめ, 欠損のない逆数行列 $A(w)$ を作る. この行列について固有値問題

$$A(w)\cdot w = \lambda w \tag{6}$$

を考える.

たとえば不完全な一対比較行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \square \\ 1/2 & 1 & 2 \\ \square & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

(□ が欠損データ) に対しては

$$A(w)\cdot w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & w_1/w_3 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ w_3/w_1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

を考えることになる. ところがこれは

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

とおくことにより, $\tilde{A}w$ に一致する. したがって (6) のかわりに, $\tilde{A}$ に関する固有値問題

$$\tilde{A}w = \lambda w$$

を解けばよい.

一般には $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ は以下のように定められる.

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} 1+m_i, & i=j\ , \\ 0, & i\neq j \text{ かつ } (i,j)\text{-成分が欠損}, \\ a_{ij}, & \text{それ以外}. \end{cases}$$

ただし m_i は第 i 行中の欠損データの個数を表す.

[Harker 法]

Step 1 欠損を含む行列 A から $\tilde{A}$ を作成.

Step 2 $\tilde{A}$ の最大固有値に対する固有ベクトルを求める.

Step 3 求めた固有ベクトルを正規化したものを重要度ウェイトと定める.

4 両手法の比較

我々は Harker 法と我々の手法との比較を行いたいが, そのためには $\tilde{A}$ の最大固有値 $\tilde{\lambda}_{\max}$ と $A(x^*)$ の最大固有値 $\lambda_{\max}(x^*)$ とを比較するのが妥当であろう. これを比較することで, どちらの手法がより整合的に欠損を補っているのかが判定できる.

この節では特に欠損が 1 箇所 ($(1,n)$-成分が欠損していると考えて一般性を失わない) の場合について調べた結果を述べる.

我々が [9] において行った実験は以下のとおりである.

[実験 1]

Step 1 a_{1n} を除く $a_{ij}, i<j$ として, $1,2,\ldots,9$ とその逆数をランダムに発生させ, 不完全一対比較行列を生成する.

Step 2 我々の手法による最大固有値 $\lambda_{\max}(x^*)$ と Harker 法による最大固有値 $\tilde{\lambda}_{\max}$ を計算する.

Step 3 $\lambda_{\max}(x^*)$ と $\tilde{\lambda}_{\max}$ を比較し, どちらが小さいかを判定する.

これを $n=4,5,\ldots,15$ のそれぞれについて 10,000 回繰り返し得られた結果が表 1 である. 最大固有値の計算にはべき乗法を用いた. べき乗法の実装については [10, 12] を参照し, 実験のプログラムは GNU C を用いて作成した.

表 1: 実験結果 1

n	win	n	win
4	9,998	10	5,204
5	7,727	11	5,085
6	6,756	12	5,181
7	6,079	13	5,003
8	5,647	14	5,033
9	5,397	15	4,984

表中の 'win' は, $\lambda_{\max}(x^*) < \tilde{\lambda}_{\max}$ が成り立った回数, すなわち我々の手法が Harker 法よりも優れていた回数を意味する.

この結果より, 我々の手法がおおむね優れていることが見て取れる. しかしながら, この実験では擬似的な不完全一対比較行列を完全にランダムに生成しているため, 極端に不整合なものが多く含まれると考えられる. そこで我々の手法で評価したあとの整合度の分布を調べたところ C.I. が 0.2 以下のケースが生じたのは n が 5 以下の場合に限られ, n が 10 を超えると, C.I. の値が 0.5 を超えるものしか現れなかった. しかし実際に人間が作成する一対比較行列は, ある程度は整合的であると推測される. そのため, 実用上重要なのは, 極端に不整合な場合における性能ではなく, ある程度整合的な場合における性能であろう.

そこで, より現実的な状況での性能を調べるため, 新たに次の実験を行った.

[実験 2]

Step 1 行列の第 1 行の成分, $a_{1j}, j = 2, 3, \ldots, n$ として, $1, 2, \ldots, 9$ とその逆数をランダムに発生させる (当然 a_{11} は 1).

Step 2 これを元に第 2 行以降の成分 $a_{ij}, i \geq 2$ を a_{1j}/a_{1i} を $1, 2, \ldots, 9$ とその逆数に丸めたものと定める.

Step 3 $(1, n)$-成分を欠損させ, 我々の手法による最大固有値 $\lambda_{\max}(x^*)$ と Harker 法による最大固有値 $\tilde{\lambda}_{\max}$ を計算する.

Step 4 $\lambda_{\max}(x^*)$ と $\tilde{\lambda}_{\max}$ を比較し, どちらが小さいかを判定する.

実験 1 と同様にこれを $n = 4, 5, \ldots, 15$ のそれぞれについて 10,000 回繰り返した. 得られた結果が表 2 である.

表 2: 実験結果 2

n	win	draw	lost
4	7,177	2,822	0
5	8,110	1,521	369
6	8,310	1,122	568
7	8,312	905	783
8	8,242	848	910
9	8,199	833	968
10	8,125	769	1,106
11	8,072	784	1,144
12	8,111	723	1,166
13	7,993	742	1,265
14	8,029	714	1,257
15	8,023	706	1,271

ここで, 表中の 'draw' は $|\lambda_{\max}(x^*) - \tilde{\lambda}_{\max}| < 10^{-6}$ が成り立った回数を意味する.

我々の手法で評価したあとの C.I. の最大値は, $n = 5$ のときが 0.19759, $n = 10$ のときが 0.16920, $n = 15$ のときが 0.14951 であった. したがって期待どおり, より現実的な状況が再現されているといってよいであろう. そしてそのより現実に近い状況で, 我々の手法が実験 1 よりも良好な結果をもたらすことが示された.

5　おわりに

今回行った実験で, 現実に近い状況のもとで, 我々の手法がかなり良好な結果をもたらすことがわかった.

しかしながらこの結果は欠損箇所が 1 箇所だけの場合に限られる. 現実にはむしろ欠損が複数あることがふつうである. 我々の手法は第 3 節でも述べたとおり, 欠損が複数ある場合の扱いが少々厄介であり, この点は欠損の個数に関わらず容易に実行可能な Harker 法と比較して最大の欠点といえる. 早急に欠損が複数ある場合の処理を実装しなければならないであろう. その際には今回と同様の実験を行いたい.

一方, 我々の手法の使途として, 比較項目の影響度診断が考えられる. これは一対比較行列の各要素を変化させ, 最も整合度の改善が見込まれる比較項目

を見つけるための手法である [4]. この手法への適用についても今後行いたいと考えている.

参考文献

[1] B. L. Golden, E. A. Wasil and P. T. Harker (Eds.): *The Analytic Hierarchy Process*, (Springer Verlag, 1989).

[2] P. T. Harker: Alternative Modes of Questioning in the Analytic Hierarchy Process, *Mathl. Modelling*, **9** (1987) 353–360.

[3] 伊理 正夫: 線形代数 II, (岩波書店, 1994).

[4] 中島 信之: 一対比較行列の整合性の改善, 富山大学経済学部富大経済論集, 第 40 巻第 2 号 (1994) 229–244.

[5] 小畑 経史, 白石 俊輔: WWW による一対比較行列の重要度計算システム, 大分大学工学部研究報告, **35** (1997) 49–54.
`http://impala.csis.oita-u.ac.jp/AHP/SimpleSystem/estimating_priorities.pdf`

[6] T. L. Saaty: *The Analytic Hierarchy Process*, (McGraw-Hill, 1980).

[7] T. L. Saaty: *The Analytic Hierarchy Process Series I*, (RWS publication, 1990).

[8] T. L. Saaty: *The Analytic Hierarchy Process Series VI*, (RWS publication, 1994).

[9] S. Shiraishi, T. Obata and M. Daigo: Properties of a Positive Reciprocal Matrix and Their Application to AHP, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, (to appear).

[10] 鈴木 誠道, 飯田 善久, 石塚 陽: C による数値計算法, (オーム社, 1997).

[11] E. Takeda and P. L. Yu: Assessing Priority Weights from Subsets of Pairwise Comparisons in Multiple Criteria Optimization Problems, *European J. Oper. Res.*, **86** (1995) 315–331.

[12] 刀根 薫: ゲーム感覚意思決定法, (日科技連, 1986).