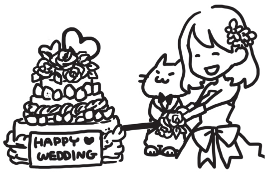
目 次

第 0 章



基本的な関数とそのグラフ

0.1　基本的な 1 変数関数とそのグラフ

0.1.1　分数関数のグラフ

POINT

- 反比例は最も基本的な分数関数
- $y = \dfrac{k}{x}$，k は定数
- 図 1 は，内側から $k = 1, 4, 8$ の反比例のグラフ
- $k > 0$ ならばグラフは第 1 象限と第 3 象限に表れる
- グラフは $y = x$ に関して対称
- x 軸と y 軸が漸近線：限りなく近づくが交差はしない

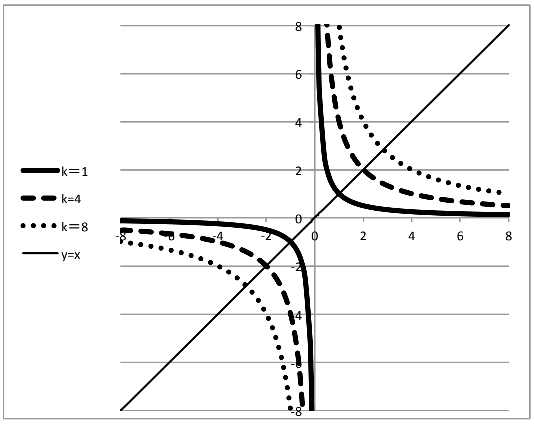


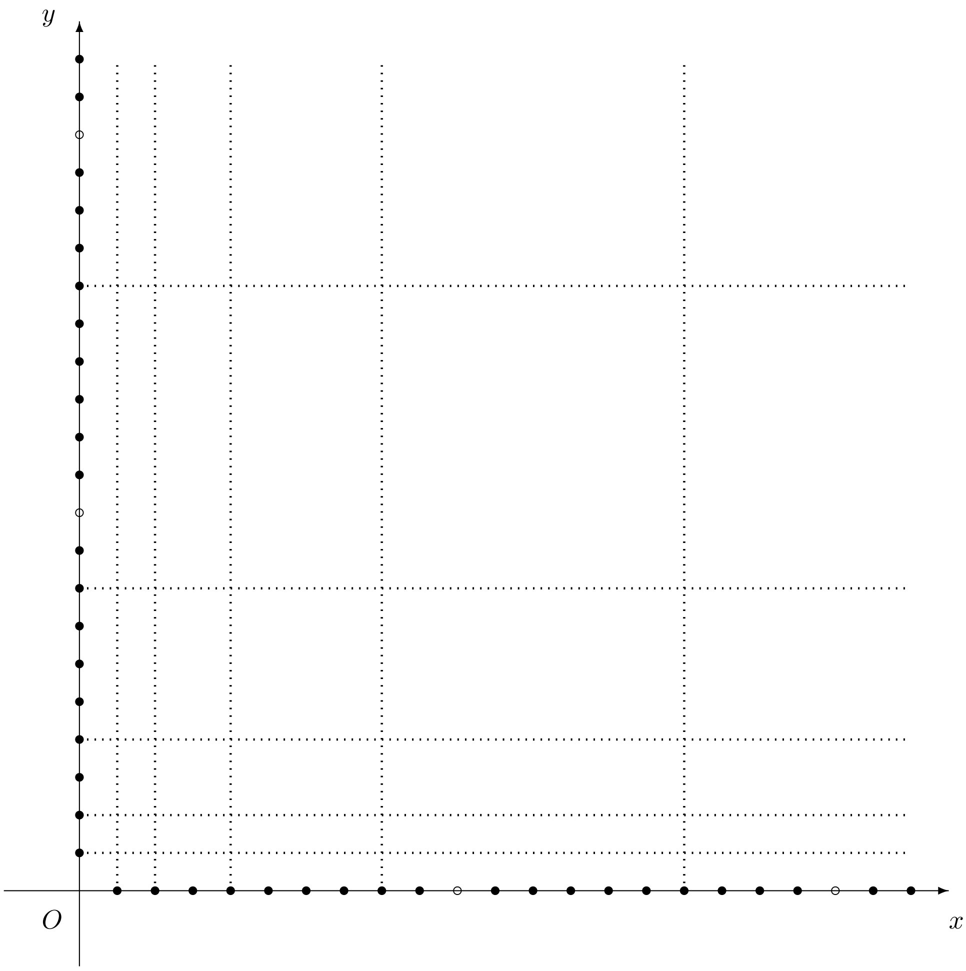
図 1　双曲線のグラフ

基礎問題

問 0.1　次の関数について，指定された x の値に対応する y の値を計算し，表を完成させなさい．次にその表のデータをもとに $x \geqq 0$ の範囲で曲線のグラフを描きなさい．

$$y = \frac{16}{x}$$

x	1	2	4	8	16
y					

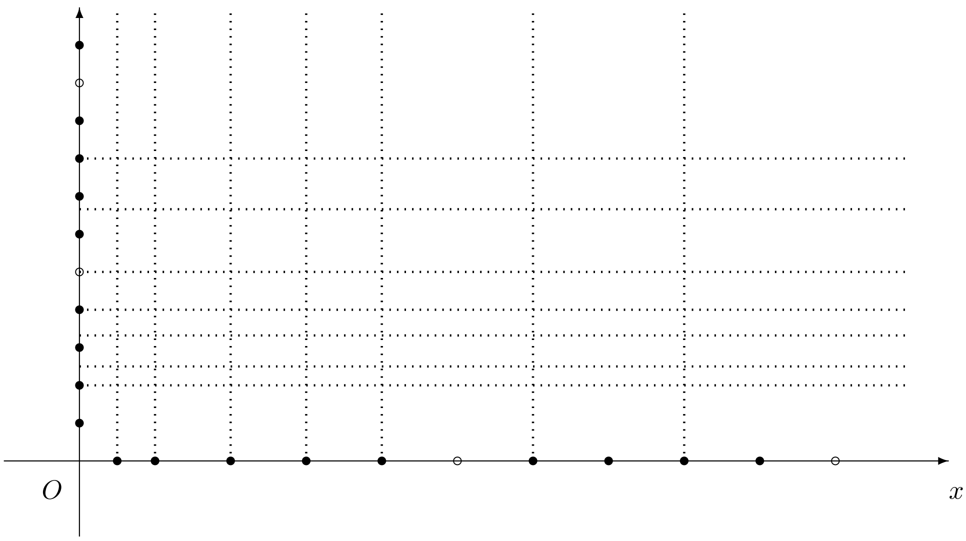


標準問題

問 0.2　次の関数について，指定された x の値に対応する y の値を計算し，表を完成させなさい．次にその表のデータをもとに $x \geqq 0$ の範囲で曲線のグラフを描きなさい．

$$y = \frac{10}{1+0.5x}$$

x	0	0.5	1	2	3	4	6	8
y								



関数 $V = \dfrac{A}{1+kD}$ を双曲線形割引関数という．これに対して，$V = Ae^{-kD}$ を指数型割引関数という．ここで，A：報酬額，D：遅延（時間），k：割引率，V：現在価値である．この関数は行動経済学において「時間非整合性」の知見を生み出した．

応用問題

問 0.3　$D \geq 0$ に対して，$\dfrac{A}{1+kD} \geq Ae^{-kD}$ を示しなさい．

例題 0.1　定数 $k > 0$ に対し，関数 $y = \dfrac{kx}{x-k}$ を考える．このとき次の問に答えなさい．

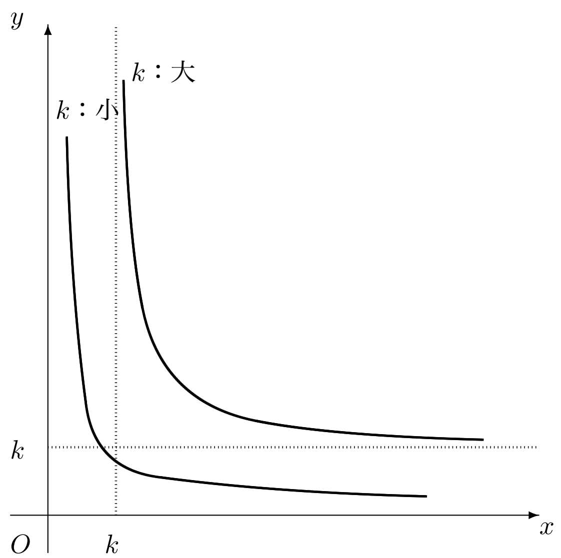
(1) $x > k$ に対し，$y > k$ であることを示しなさい．

(2) xy 平面にグラフを描きなさい．

解答

$$\begin{aligned} y &= \frac{kx}{x-k} \\ &= \frac{k(x-k)+k^2}{x-k} \\ &= k + \frac{k^2}{x-k}. \end{aligned}$$

の変形から，$y > k$ であり，グラフは $y = \dfrac{k^2}{x}$ を x 軸方向にも，y 軸方向にも k だけ平行移動したものであることが分かる．



終

0.1.2　$y = \sqrt[n]{x}$

POINT

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a \Longleftrightarrow a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \tag{1}$$

関係式 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$ から，方程式 $x^n = a,$ の解 x を求めればそれが，$x = a^{\frac{1}{n}}$ であることを (1) 式は 意味している．$y = x^n$ のグラフを描く．

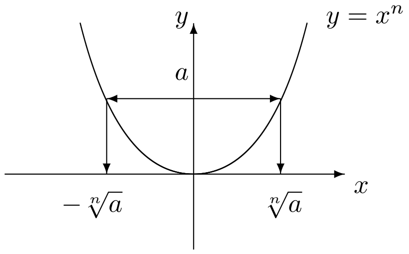
n：偶数

$$y' = nx^{n-1} = nx^{奇数}$$

増減表

x		0	
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$

グラフ



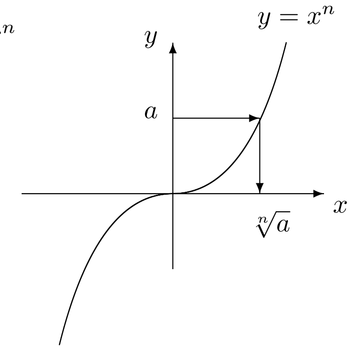
n：奇数

$$y' = nx^{n-1} = nx^{偶数} \geq 0$$

増減表

x		0	
y'	$+$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$

グラフ



$y = x^n$ のグラフを n の偶奇に分けて描くことで，$a > 0$ なら $x^n = a$ は必ず解を持つことが分かる．解は，n が偶数の時はふたつ，n が奇数の場合はひとつ．いずれも $x > 0$ の範囲にある解を，累乗根といい，根号[1) を用いて $\sqrt[n]{a}$ と書く．

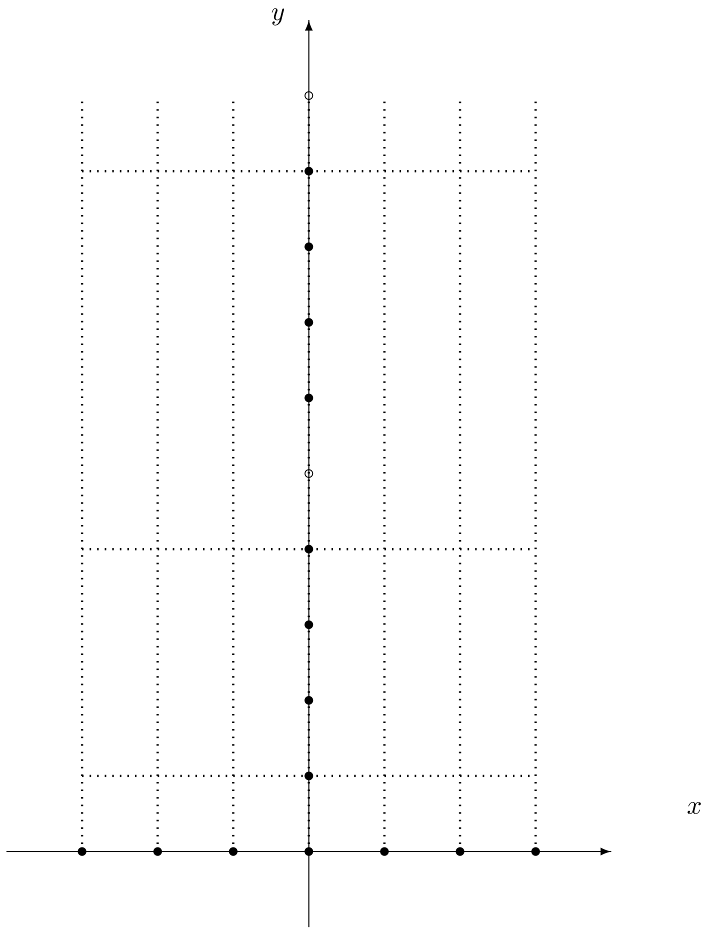
[1) $n = 2$ のときだけ、特例として $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ と書く．

基礎問題

問 0.4　次の式で表される関数について，まず指定された x の値に対応する y の値を計算し，表を完成させなさい．次にその表のデータをもとに曲線のグラフを描きなさい．

$y = x^2$

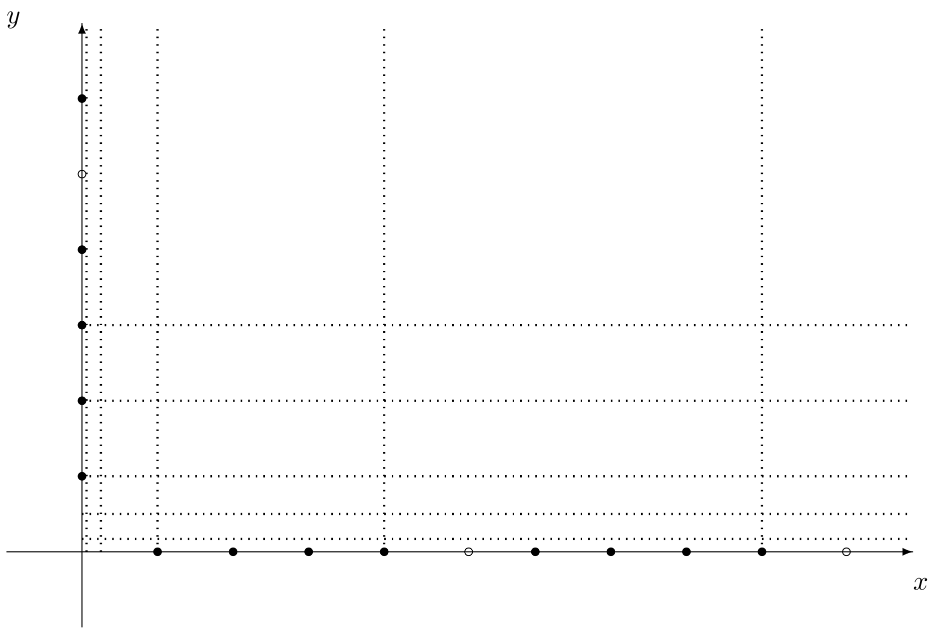
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



問 0.5　次の式で表される関数について，まず指定された x の値に対応する y の値を計算し，表を完成させなさい．次にその表のデータをもとに $x \geqq 0$ の範囲で曲線のグラフを描きなさい．

$y = \sqrt{x}$　　ヒント：$\sqrt{a^2} = a$

x	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9
y						



ちょっとメモ　知っていて損はないし、日本の伝統芸なので、おぼえよう：

$\sqrt{2}$： 1.41421356（ひとよひとよにひとみごろ）

$\sqrt{3}$： 1.7320508（ひとなみにおごれや）

$\sqrt{5}$： 2.2360679（ふじさんろくおうむなく）

POINT

- 逆関数の微分：　$\left(f^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$
- 逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフ：$y = f(x)$ のグラフを 45 度線で折り返す

応用問題

例題 0.2　$x \geq 0$ とする．$g(x) = \sqrt{x}$ は，$f(x) = x^2$ の逆関数であることから，逆関数の微分公式を用いて，$\left(\sqrt{x}\right)'$ を求めなさい．

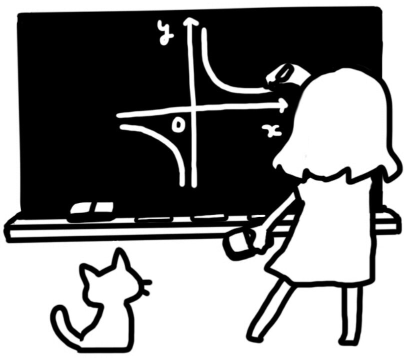
解答　$f'(x) = 2x$ だから，

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x}\right)' = g'(x) = \left(f^{-1}\right)'(x) &= \frac{1}{f'(g(x))} \\ &= \frac{1}{f'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

終

問 0.6　$g(x) = \log x$ は，$f(x) = e^x$ の逆関数であることを利用し，$\left(\log x\right)'$ を求めなさい．

問 0.7　反比例のグラフが $y = x$ に関して対称になるのはなぜなのか，説明しなさい．


y
O
x

0.1.3　連立方程式の解とグラフの交点

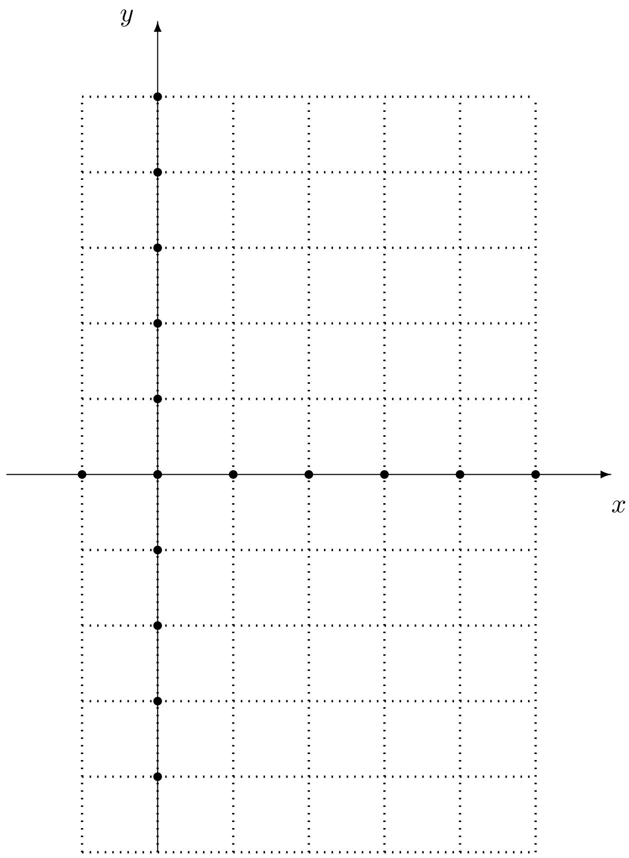
POINT

- グラフの交点 $\Longleftrightarrow$ 連立方程式の解
- グラフが交わらない $\Longleftrightarrow$ 連立方程式の解なし

基礎問題

問 0.8　次の式で表される関数について，グラフを描きなさい．また，交点の座標を，図の範囲内で求めなさい．

①　$y = x^2 - 2x$　　②　$y = 2x - 4$　　③　$y = \dfrac{8}{x} - 4$

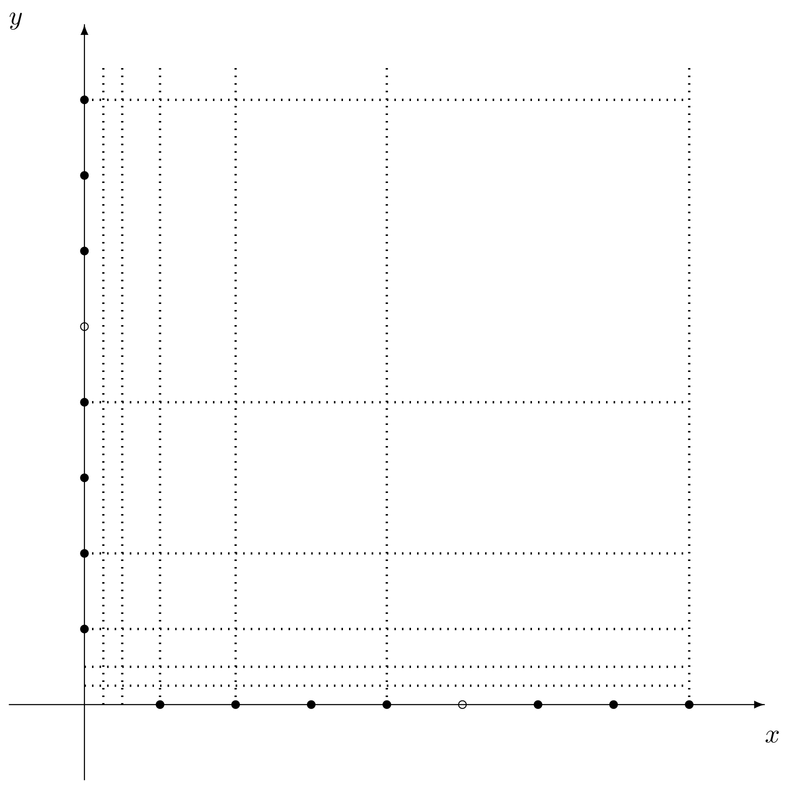


標準問題

問 0.9　次の式で表される 3 つの関数について，指定された x の値に対応する y の値を計算し，表を完成させなさい．次にその表のデータをもとに $x \geqq 0$ の範囲で曲線のグラフを同じ $x-y$ 平面上に描きなさい．また直線 ① と曲線 ② の $x \geqq 0$ での交点を求めなさい．

①　$y = \dfrac{1}{2}x$　　②　$y = \dfrac{2}{x}$　　③　$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{x}$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
①						
②						
③						



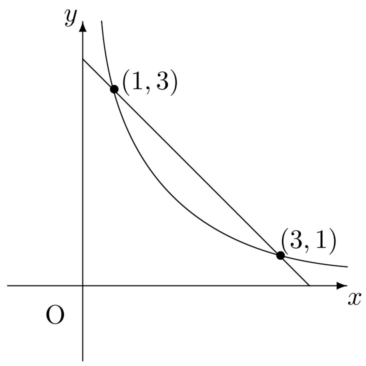
例題 0.3　次の連立方程式の解を求めなさい．また図に示して，解の位置を確認しなさい．

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{x} & \cdots ① \\ x + y = 4 & \cdots ② \end{cases}$$

解答　①を②に代入する：

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{x} &= 4 \\ x^2 + 3 &= 4x && \cdots \text{両辺に } x \text{ をかけた} \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 && \cdots \text{左辺を因数分解した} \\ \bigl(x-1\bigr)\bigl(x-3\bigr) &= 0 \\ x &= 1, 3 \end{aligned}$$

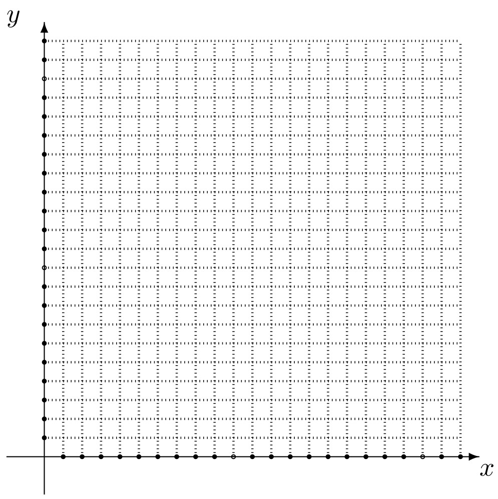
①に $x = 1, 3$ を代入しそれぞれ計算する：$(x, y) = (1, 3), (3, 1)$.
図は以下の通り．



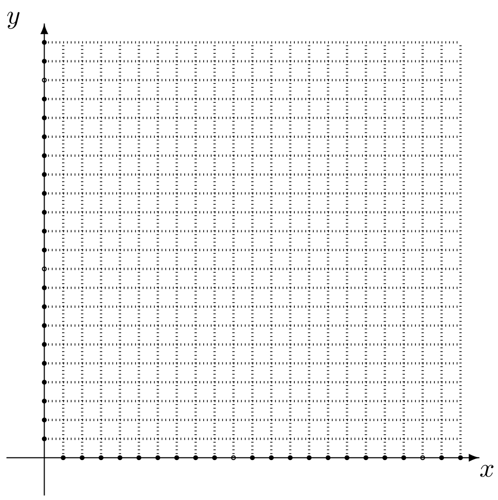
終

問 0.10　次の連立方程式の解を求めなさい．また図に示して，解の位置を確認しなさい．

(1)
$$\begin{cases} y = \dfrac{16}{x} & \cdots ① \\ x + y = 10 & \cdots ② \end{cases}$$



(2)
$$\begin{cases} y = \dfrac{16}{x} & \cdots ① \\ x + y = 8 & \cdots ② \end{cases}$$



0.2　2 変数関数のグラフ

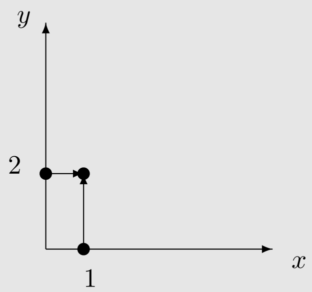
0.2.1　3D グラフにチャレンジ

POINT：1 変数関数の 2D グラフプロット

関数　$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

代入　$f(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 9 \times 1 - 2 = 2$

グラフ　$y = f(x)$



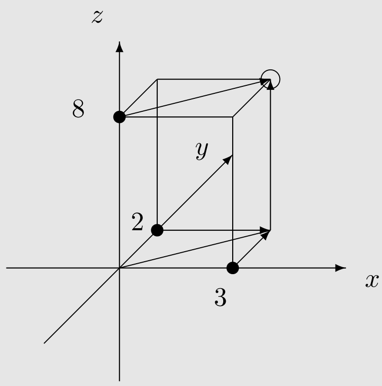
1 変数の関数 $y = f(x)$ のグラフは点 $(x, f(x))$ 全体の集合であるから，それは xy 平面において 1 つの曲線を作る．

POINT：2 変数関数の 3D グラフプロット

関数　$f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 4y$

代入　$f(3, 2) = 2 \times 3^2 + 2 \times 3 \times 2 + 2^2 - 6 \times 3 - 4 \times 2 = 8$

グラフ　$z = f(x, y)$



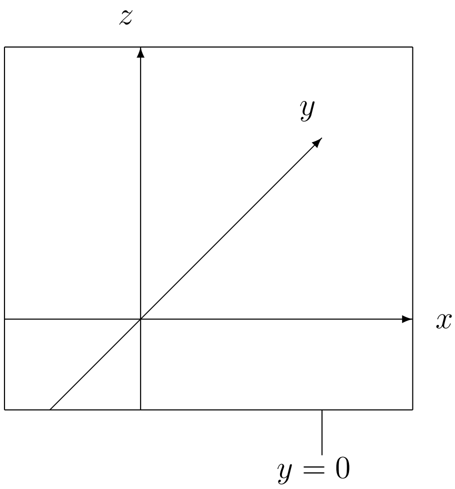
2 変数の関数 $z = f(x, y)$ のグラフは点 $(x, y, f(x, y))$ 全体の集合であるから，それは xyz 空間において 1 つの曲面を作る．曲面のグラフを描く場合には，曲線に比べるとシステマティックな工夫が必要となる．そのひとつの手だてがカットである．

基礎問題

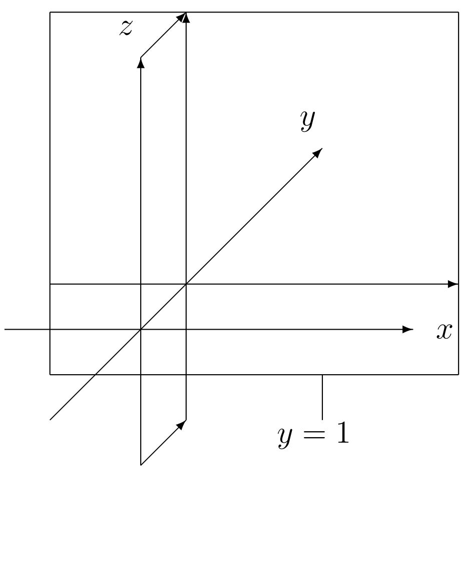
問 0.11　次の関数について，以下の問に答えなさい．

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

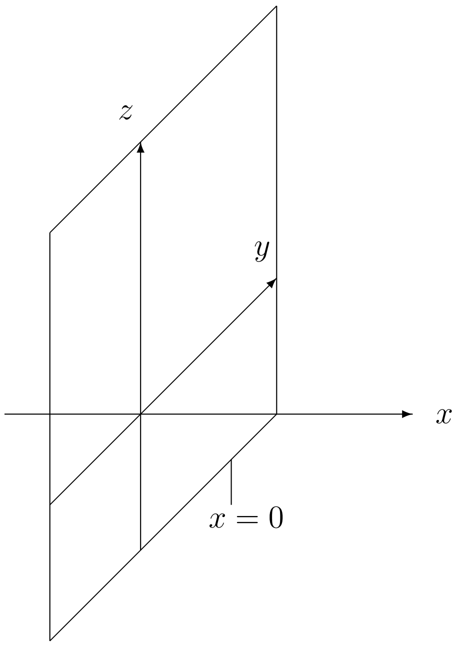
(1)　$z = f(x, 0)$ のグラフを次図に描きなさい．



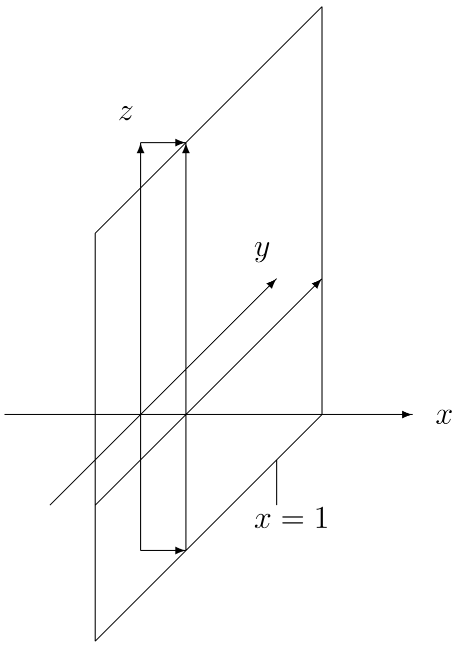
(2)　$z = f(x, 1)$ のグラフを次図に描きなさい．



(3)　$z = f(0, y)$ のグラフを次図に描きなさい.



(4)　$z = f(1, y)$ のグラフを次図に描きなさい.



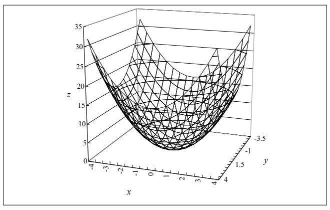
標準問題

例題 0. 4　関数 $f(x,y) = xy$ のグラフを描きなさい.

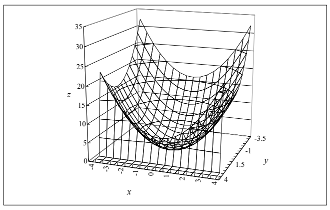
解答

- 関数 $z = x^2 + y^2$ を x 軸に平行にカットした図.
- ⑥→①の順に手前に積み重ねていくと 3D グラフが完成

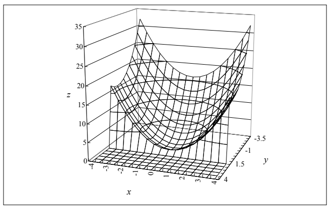
① ウエディングケーキ



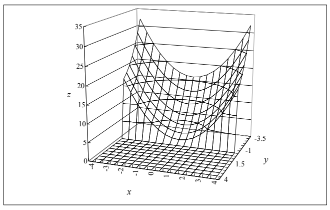
② ご入刀でございます



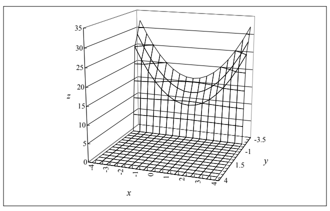
③ おめでとうございます



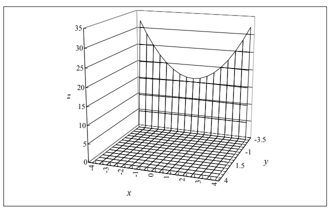
④ すてきなおふたりの ♡



⑤ ツーショット写真をお撮り下さい



⑥ それでは盛大な拍手を ♡♡



終

ちょっとメモ　y 軸に平行にカットしても同様の構成が可能. 試してほしい.

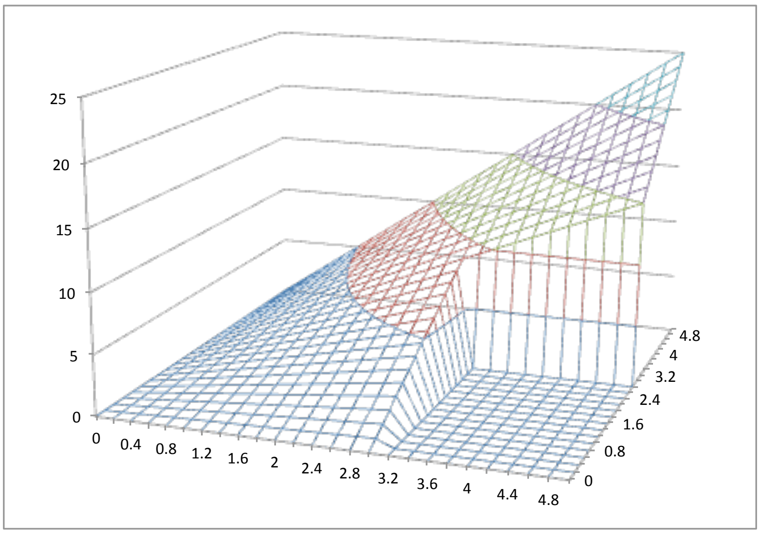
例題 0.5　関数 $f(x,y)=xy$ について答えなさい．

(1) $z=f(x,3)$ のグラフを描きなさい．

(2) $z=f(3,y)$ のグラフを描きなさい．

(3) $z=f(x,y)$ のグラフを描きなさい．

解答　下図は，曲面から $x \geq 3, y \leq 3$ の領域をくり抜いたようすを示している．切断面には，$z=3x, z=3y$ を示す直線が見て取れる．



終

問 0.12　次の関数のグラフを描きなさい．表計算ソフトを使ってもよい．

(1) $f(x,y)=x^2-y^2$

(2) $f(x,y)=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

(3) $f(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

(4) $f(x,y)=\log x+\log y$

(5) $f(x,y)=e^{x-y}$

0.2.2　接平面

POINT

曲面 $z = f(x, y)$ の $(\bar{x}, \bar{y})$ における接平面の式は

$$z = f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}).$$

例題

例題 0. 6　xyz 空間内の曲面 $z = f(x, y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$ の $(x, y) = (1, 1)$ における接平面の式を求めなさい.

解答

$$f(1, 1) = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \frac{1}{2},$$

であるので，求める接平面の式は

$$z = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1)$$

とかける.　終

問 0. 13　xyz 空間内の曲面 $z = f(x, y)$ の $(x, y) = (1, 1)$ における接平面の式を求めなさい.

(1) $z = x^2 + y^2$

(2) $f(x, y) = x^2 - y^2$

(3) $f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$

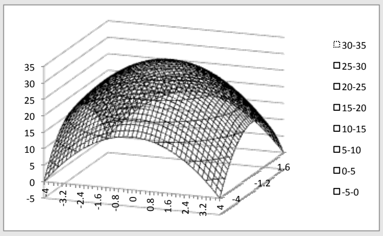
(4) $f(x, y) = \log x + \log y$

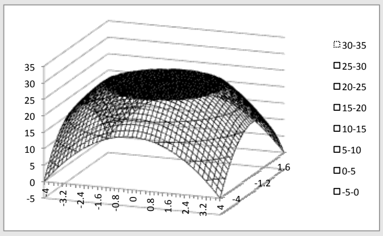
(5) $f(x, y) = e^{x-y}$

0.2.3　等高線

POINT

- $f(x,y) =$ 一定値 となる，(x,y) の境界線が等高線
- グラフをスライスしたものになる





標準問題

問 0.14　次の等高線を第 1 象限に描きなさい.

(1) $x^2 + y^2 = 4$

(2) $x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = 1$

(3) $x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} = 1$

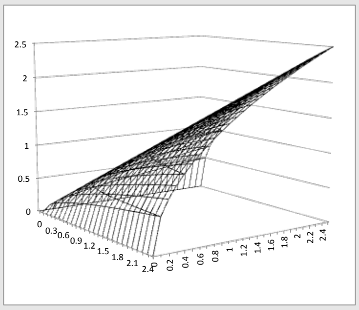
(4) $\log x + \log y = 1$

(5) $xy = 4$

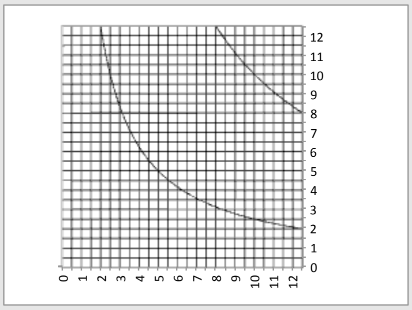
0.2.4　等高線と無差別曲線

POINT

- 効用曲面の等高線 $\Longleftrightarrow$ 無差別曲線



効用曲面



無差別曲線

0.2.5　3D グラフのための表計算ソフトにおける複合参照

座標軸

	A	**B**	**C**	**D**	← 列番号
1		B1	C1	D1	← x 座標
2	A2				
3	A3				
4	A4				
↑	↑				
行番号	y 座標				

- x 座標は第 1 行のセル番号：B1, C1, D1, $\cdots$ にオートフィルを使う等して入力
- y 座標は第 1 列のセル番号：A2, A3, A4, $\cdots$ にオートフィルを使う等して入力
- 必然的に A1 セルは空セルになる

関数値：相対参照から複合参照への道のり

分かりやすくするため，簡単な関数 $z = xy$ を入力することにする．

	A	**B**	**C**	**D**	← 列番号
1		B1	C1	D1	← x 座標
2	A2	=A2*B1			
3	A3				
4	A4				
↑	↑				
行番号	y 座標				

これをこのまま縦方向にオートフィル（コピペ）すると，相対参照なので行番号が平行移動して次のようになる．

	A	**B**	**C**	**D**	← 列番号
1		B1	C1	D1	← x 座標
2	A2	=A2∗B1			
3	A3	=A3∗B2			
4	A4	=A4∗B3			
↑	↑				
行番号	y 座標				

y 座標の行番号は平行移動してほしいが，x 座標の行番号は平行移動してほしくないので，あらかじめ $ をつけることで，次のような結果になるようにする．

	A	**B**	**C**	**D**	← 列番号
1		B1	C1	D1	← x 座標
2	A2	=A2∗B$1			
3	A3	=A3∗B$1			
4	A4	=A4∗B$1			
↑	↑				
行番号	y 座標				

これをこのまま横方向にオートフィル（コピペ）すると，相対参照部分の列番号が平行移動して次のようになる．

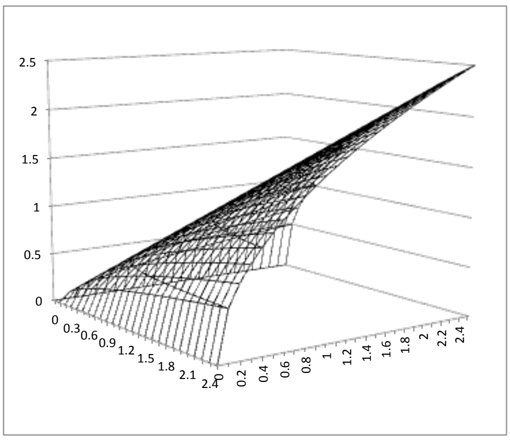
	A	**B**	**C**	**D**	← 列番号
1		B1	C1	D1	← x 座標
2	A2	=A2∗B$1	=B2∗C$1	=C2∗D$1	
3	A3				
4	A4				
↑	↑				
行番号	y 座標				

こんどは x 座標の列番号は平行移動してほしいが，y 座標の列番号は平行移動してほしくないので，あらかじめ $ をつけることで，次のような結果になるようにする．

	A	**B**	**C**	**D**	← 列番号
1		B1	C1	D1	← x 座標
2	A2	=$A2∗B$1	=$A2∗C$1	=$A2∗D$1	
3	A3				
4	A4				
↑	↑				
行番号	y 座標				

最終的なコピペの結果として，複合参照がうまく働いているのがよくわかる．

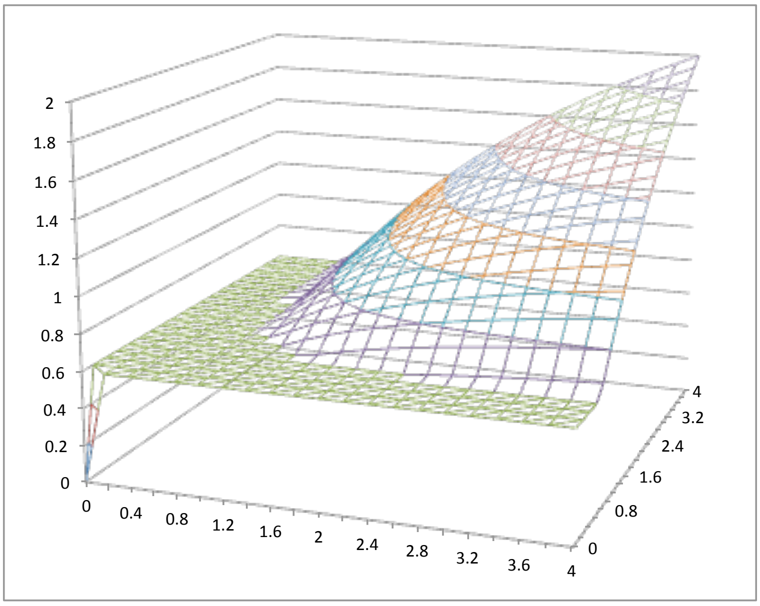
	A	**B**	**C**	**D**	← 列番号
1		B1	C1	D1	← x 座標
2	A2	=$A2∗B$1	=$A2∗C$1	=$A2∗D$1	
3	A3	=$A3∗B$1	=$A3∗C$1	=$A3∗D$1	
4	A4	=$A4∗B$1	=$A4∗C$1	=$A4∗D$1	
↑	↑				
行番号	y 座標				



エクセルで描いた $z = xy$ の 3D グラフ

応用問題

問 0.15　関数 $u(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$ の無差別曲線を，$x>0, y>0$ の領域に描きなさい．ヒントは例題 8.1.



0.2.6　等高線と予算線の図解

標準問題

例題 0.7　X-財を x 単位，Y-財を y 単位，手にした場合の，満足度 を表す **効用関数** が $z=xy$ であるとする．満足度 $z=3$ の場合，(x,y) のペアが満たす曲線（無差別曲線）を描きなさい．

解答　満足度 $z=3$ の場合：$3=xy \Leftrightarrow y=\dfrac{3}{x}$ なので，例題 8.2 の図になる．　終

例題 0.8　次の連立方程式の解を求めなさい．次に，解の位置における $f(x,y)$, $g(x,y)$ の偏微分を求めなさい．

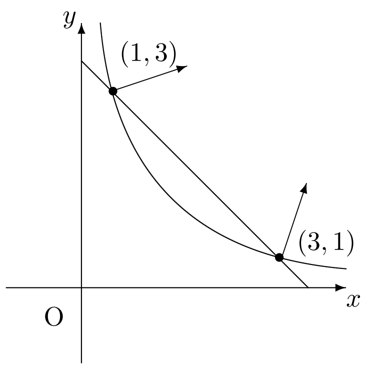
$$\begin{cases} 0 &= f(x,y) = xy - 3 \quad \cdots ① \\ 0 &= g(x,y) = x + y - 4 \quad \cdots ② \end{cases}$$

解答　① 式，② 式を変形すると，

$$\begin{cases} y &= \dfrac{3}{x} \quad \cdots ① \\ x+y &= 4 \quad \cdots ② \end{cases} \qquad (x,y) = (1,3), (3,1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x \end{cases} \text{なので，} \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,3) &= 3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,3) &= 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(3,1) &= 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(3,1) &= 3. \end{cases}$$

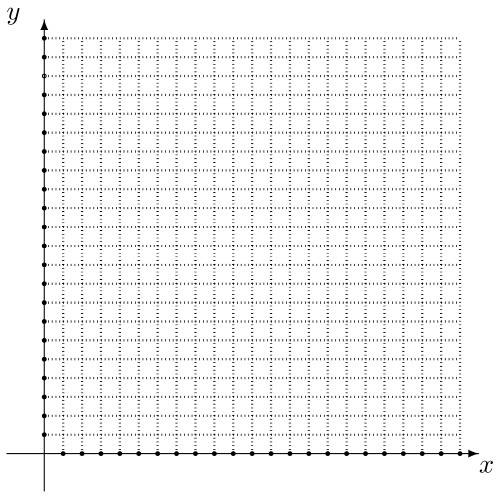
$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= 1 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= 1 \end{cases} \text{なので，} \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(1,3) &= 1 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,3) &= 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(3,1) &= 1 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(3,1) &= 1. \end{cases}$$



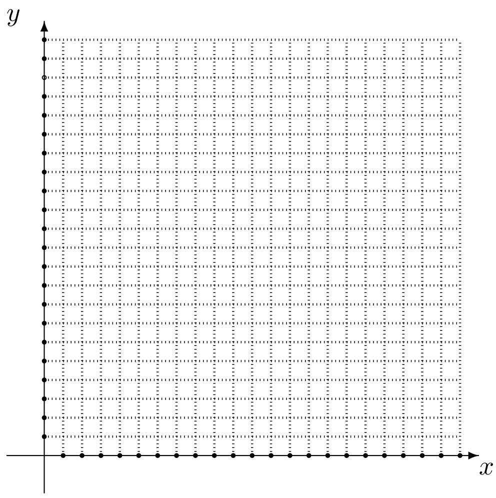
終

問 0.16　次の連立方程式の解を求めなさい．次に，解の位置における $f(x,y)$，$g(x,y)$ の偏微分を求めなさい．

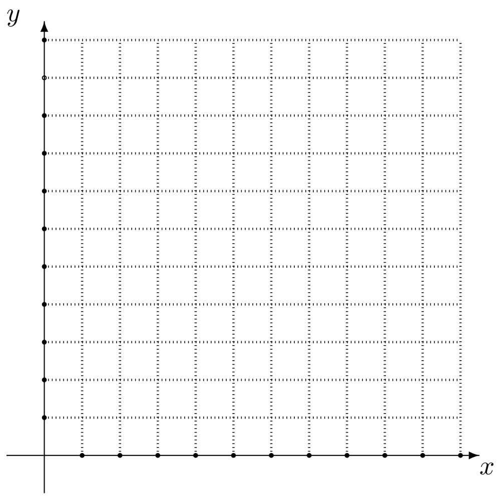
(1)
$$\left\{\begin{array}{lcll} 0 & = & f(x,y) = xy - 16 & \cdots ① \\ 0 & = & g(x,y) = x + y - 10 & \cdots ② \end{array}\right.$$



(2)
$$\left\{\begin{array}{lcll} 0 & = & f(x,y) = xy - 16 & \cdots ① \\ 0 & = & g(x,y) = x + y - 8 & \cdots ② \end{array}\right.$$



(3) $$\begin{cases} 0 = f(x,y) = x^2 + y^2 - 10 & \cdots ① \\ 0 = g(x,y) = x + y - 4 & \cdots ② \end{cases}$$



(4) $$\begin{cases} 0 = f(x,y) = x^2 + y^2 - 8 & \cdots ① \\ 0 = g(x,y) = x + y - 4 & \cdots ② \end{cases}$$